

# Alpha 稳定分布噪声中的韧性投影 近似子空间跟踪算法

李 森<sup>1,2</sup> 邱天爽<sup>1</sup>

(1. 大连理工大学电子与信息工程学院, 辽宁大连 116024; 2. 大连海事大学信息科学技术学院, 辽宁大连 116026)

**摘 要:** 为了克服投影近似子空间跟踪算法(PAST)在脉冲噪声环境下性能的退化, 本文以 Alpha 稳定分布为脉冲噪声模型, 依据韧性的 M 估计方法提出了一种新的代价函数, 并推导出基于递归最小 M 估计的韧性投影近似自适应信号子空间跟踪算法(RLM-PAST). 由于采用了适合噪声模型的 M 估计函数, 新算法与采用递归最小二乘估计的子空间跟踪算法相比, 在稳定分布脉冲噪声环境下具有更好的性能. 把新方法应用于波达方向(DOA)估计, 数值仿真结果表明了该算法的有效性.

**关键词:** 递归最小 M 估计 (RLM); Alpha 稳定分布; 波达角 (DOA) 估计; 子空间跟踪

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 03-0519-04

## A Robust PAST Algorithm in Alpha Stable Noise Environment

LI Sen<sup>1,2</sup>, QIU Tianshuang<sup>1</sup>

(1. School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;

2. Information Science Technology College, Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026, China)

**Abstract:** In order to improve the performance of projection approximation subspace tracking (PAST) algorithm under impulsive noise environment, based on Alpha stable distribution as the impulsive noise model, a new cost function is proposed using the robust nr estimation method and then the robust PAST algorithm (RLM-PAST) is deduced based on the recursive least nr estimate. Because the robust nr estimation function suitable for the Alpha stable noise model is used, the proposed algorithm offers good performance against impulsive noise over the PAST algorithm in direction of arrival (DOA) estimation. The simulation results show the efficiency of the proposed algorithm.

**Key words:** recursive least nr estimate (RLM); Alpha stable distribution; direction of arrival (DOA) estimation; subspace tracking

### 1 引言

子空间是信号处理的有力工具, 在信号处理领域中有着十分重要的地位. 很多信号处理问题都离不开信号子空间分析, 例如: 谐波信号的频率估计、阵列信号处理中的波达方向估计、波束形成、信号恢复以及数据压缩等等. 使用子空间技术往往给信号处理带来很多好处, 如: 高分辨率、韧性、减少计算量等. 因此, 子空间技术在各个工程领域里都获得了广泛的应用. 在某些问题中子空间是时变的, 需要对子空间进行跟踪, 很多有效的自适应子空间跟踪方法被提出来<sup>[1,2]</sup>. 其中最受人们关注的是 Bin Yang 提出的基于最小二乘估计(RLS)的投影近似子空间跟踪算法(PAST)<sup>[2,3]</sup>. 但是由于 RLS 算法对脉冲噪声非常敏感, 使得 PAST 算法在脉冲噪声环境下性能出现退化<sup>[4]</sup>. 人为的或者自然界产生的脉冲噪声

普遍存在于工程领域中<sup>[5,6]</sup>, 如移动通信中的电磁干扰噪声、水下声通信中的冰层断裂噪声以及大气环境中的雷暴噪声等. 这些噪声由于具有非常强的脉冲性而不适合用高斯模型来描述, 文献[6]提出可用 Alpha 稳定分布模型来描述这类非高斯型噪声.

本文以 Alpha 稳定分布为脉冲噪声模型, 分析了 PAST 算法在该噪声环境下性能退化的原因. 依据鲁棒的 M 估计方法对 PAST 算法的代价函数进行改进, 并利用矩阵求逆定理推导出基于递归最小 M 估计的韧性投影近似信号子空间跟踪算法(RLM-PAST). 由于采用了适合噪声模型的 M 估计函数, 新算法与采用递归最小二乘估计的子空间跟踪算法相比, 在稳定分布脉冲噪声环境下具有更好的性能. 把新方法应用于波达方向(DOA)估计, 数值仿真结果表明了该算法的有效性.

## 2 Alpha 稳定分布噪声模型

Alpha 稳定分布噪声模型没有统一的概率密度函数表达式, 通常用它的特征函数来描述该类分布

$$\varphi(t) = e^{j\alpha t - \gamma |t|^\alpha / [1 + j\beta \operatorname{sgn}(i) \omega(t, \alpha)]} \quad (1)$$

其中  $\omega(t, \alpha) = \tan(\alpha\pi/2)$ , 如果  $\alpha \neq 1$ ,  $\omega(t, \alpha) = (2/\pi) \log |t|$ , 如果  $\alpha = 1$ .  $\alpha$  为特征指数 ( $0 < \alpha \leq 2$ ), 控制着稳定分布过程的脉冲性程度,  $\alpha$  越小脉冲性越强, 分布的拖尾越厚;  $\beta$  是对称系数,  $\beta = 0$  时表示对称分布, 记为 SaS (Symmetry  $\alpha$  stable) 分布;  $\gamma$  是分散系数, 类似于高斯分布的方差.  $a$  为位置参数, 对应于稳定分布的均值或中值.  $\alpha = 2$  和  $\beta = 0$  对应于高斯分布;  $\alpha = 1$  和  $\beta = 0$  对应于柯西分布;  $\alpha = 1/2$

和  $\beta = -1$  对应于皮尔森分布. Alpha 稳定分布与高斯分布的一个重要区别在于前者不具有  $\alpha$  阶及以上各阶统计量.

## 3 子空间跟踪和 PAST 算法

基于子空间的高分辨率方法虽然非常有效, 但是由于它通常要求特

征值分解或者奇异值分解而使计算量很大, 不便于在时变的环境中实现. 因此近年来提出了许多计算量较小的自适应子空间跟踪算法, 其中最受人关注的就是基于最小二乘估计的投影近似子空间跟踪算法 (PAST). 设  $r$  个平面波入射到  $N$  ( $N > r$ ) 个传感器组成的均匀线性阵列上,  $i$  时刻的观测数据矢量表示为  $x(i) = [x_1(i), x_2(i), \dots, x_N(i)]^T$ , 其中  $x_k(i)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  为第  $k$  个传感器在  $i$  时刻的观测值. 于是  $x(i)$  可以表示为

$$x(i) = As(i) + n(i) \quad (2)$$

其中  $A = [a(\omega_1), a(\omega_2), \dots, a(\omega_r)]$  是一个  $N \times r$  矩阵, 且  $a(\omega_k) = [1, e^{j\omega_k}, \dots, e^{j(N-1)\omega_k}]^T$ , ( $k = 1, \dots, r$ ) 为导向矢量;  $s(i) = [s_1(i), s_2(i), \dots, s_r(i)]^T$  为源信号矢量;  $n(i) = [n_1(i), n_2(i), \dots, n_N(i)]^T$  为噪声矢量并假设它是服从 Alpha 稳定分布的. 以  $W \in C^{N \times r}$  表示观测矢量  $x(i)$  的信号子空间, 则 PAST 算法通过最小化下面的代价函数来估计该信号子空间<sup>[2]</sup>

$$J_{\text{PAST}}(W(i)) = \sum_{n=1}^i \beta^{i-n} \|x(n) - W(i)y(n)\|_2^2 \quad (3)$$

其中  $0 < \beta < 1$  为遗忘因子;  $y(n) = W^H(i-1)x(n)$  为投影近似矢量, 为了得到使式(3)最小的  $W(i)$ , 对其求导

并令导数为零, 可得

$$W(i) = C_{xy}(i) C_{yy}^{-1}(i) \quad (4)$$

其中

$$C_{xy}(i) = \sum_{n=1}^i \beta^{i-n} x(n) y^H(n) = \beta C_{xy}(i-1) + x(i) y^H(i) \quad (5)$$

$$C_{yy}(i) = \sum_{n=1}^i \beta^{i-n} y(n) y^H(n) = \beta C_{yy}(i-1) + y(i) y^H(i) \quad (6)$$

对式(6)应用矩阵求逆定理, 就可得到基于最小二乘估计(RLS)的投影近似子空间跟踪算法, 如表 1 左侧所示<sup>[2]</sup>.

表 1 PSAT 算法和 RLM-PAST 算法

PAST 算法	RLM-PAST 算法
初始化 $V(0)$ 和 $W(0)$	初始化 $V(0)$ 和 $W(0)$
for $i = 1, 2, \dots$ , do	for $i = 1, 2, \dots$ , do
$y(i) = W^H(i-1)x(i)$	$y(i) = W^H(i-1)x(i)$
$e(i) = x(i) - W(i-1)y(i)$	$e(i) = x(i) - W(i-1)y(i)$
$K(i) = \frac{y^H(i)V(i-1)}{\beta + y^H(i)V(i-1)y(i)}$	$K(i) = \frac{y^H(i)V(i-1)}{\beta + \varphi(\ e(i)\ _2^2)y^H(i)V(i-1)y(i)}$
$V(i) = \frac{1}{\beta} \operatorname{Tr}[V(i-1) - V(i-1)y(i)K(i)]$	$V(i) = \frac{1}{\beta} \operatorname{Tr}[V(i-1) - \varphi(\ e(i)\ _2^2)V(i-1)y(i)K(i)]$
$W(i) = W(i-1) + e(i)K(i)$	$W(i) = W(i-1) + \varphi(\ e(i)\ _2^2)e(i)K(i)$
end	end

RLS 算法对 Alpha 稳定分布脉冲噪声非常敏感. 这是由于式(5)中  $C_{xy}(i)$  其实是对投影近似矢量  $y(i)$  和观测矢量  $x(i)$  的互相关矩阵  $R_{xy} = E[x(i)y^H(i)]$  的估计, 而式(6)中的  $C_{yy}(i)$  其实是对投影近似矢量  $y(i)$  的自相关矩阵  $R_{yy} = E[y(i)y^H(i)]$  的估计, 由于  $y(i)$  是观测矢量  $x(i)$  的线性组合, 而观测矢量  $x(i)$  如式(2)所示是服从 Alpha 稳定分布的, 因此  $y(i)$  也是服从 Alpha 稳定分布的. 由前面介绍的 Alpha 稳定分布 ( $\alpha < 2$ ) 不具有有限二阶矩的性质可知, 估计矩阵  $C_{xy}(i)$  和  $C_{yy}(i)$  中的元素由于受到稳定分布脉冲噪声的影响要比真实值大很多, 从而使得 PAST 算法在稳定分布噪声环境下性能将出现退化, 仿真结果验证了这一点.

## 4 韧性的投影近似子空间跟踪算法

为了提高 PAST 算法在稳定分布脉冲噪声环境中的有效性, 依据 Huber 提出的 M 估计理论<sup>[7]</sup>, 本文提出了一种新的代价函数

$$J_{\text{RLM-PAST}}(W(i)) = \sum_{n=1}^i \beta^{i-n} \rho(\|x(n) - W(i)y(n)\|_2^2) \quad (7)$$

其中  $\rho(\cdot)$  为 M 估计函数, 它的导数记为  $\varphi(\cdot) = \dot{\rho}(\cdot)$ , 称为 score 函数. 文献[8]指出在利用 M 估计方法求解

稳定分布脉冲噪声环境下的参数估计问题中, 采用柯西分布的 score 函数在具有不同特征指数的稳定分布噪声下都能够得到很好的估计结果, 因此本文选取柯西分布的 score 函数, 即

$$\Phi(x) = 2x / (1 + x^2) \quad (8)$$

对式(7)求导并令其为零, 可得

$$W(i) = \tilde{C}_{xy}(i) \tilde{C}_{yy}^{-1}(i) \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{xy}(i) &= \sum_{n=1}^i \beta^{-n} \Phi(\|e(n)\|_2^2) x(n) y^H(n) \\ &= \beta \tilde{C}_{xy}(i-1) + \Phi(\|e(i)\|_2^2) x(i) y^H(i) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{yy}(i) &= \sum_{n=1}^i \beta^{-n} \Phi(\|e(n)\|_2^2) y(n) y^H(n) \\ &= \beta \tilde{C}_{yy}(i-1) + \Phi(\|e(i)\|_2^2) y(i) y^H(i) \end{aligned} \quad (11)$$

$$e(n) = x(n) - W(i-1)y(n) \quad (12)$$

利用矩阵求逆定理

$$(A + \beta xy^H)^{-1} = A^{-1} / I - (\beta xy^H A^{-1}) / (1 + \beta y^H A^{-1} x)$$

并设  $V(i) = \tilde{C}_{yy}^{-1}(i)$ , 可得基于最小 M 估计<sup>[9]</sup>的韧性子空间跟踪算法, 如表 1 右侧所示。

这样得到的  $\tilde{C}_{xy}(i)$  和  $\tilde{C}_{yy}(i)$  是  $R_{xy}$  和  $R_{yy}$  在稳定分布噪声环境下的鲁棒估计。为了验证这种估计方法的鲁棒性, 对均值为 0、自相关为 1 的高斯信号源在均值为 0、 $\alpha = 1.7$ 、GSNR = 5dB (定义如式(13)) 的对称稳定分布噪声环境下的自相关值进行估计。采用(6)式的一般估计方法得到的自相关值为 3.7606, 可以看出由于受

到没有有限二阶矩的稳定分布脉冲噪声的影响使得这种估计方法所得到的自相关值比真实值要大很多; 而采用(11)式的鲁棒估计方法得到的自相关值为 0.99446, 非常接近源信号的自相关值, 说明新的估计方法不受脉冲噪声的影响, 具有很好的韧性。因此可以推断依据这种鲁棒估计的子空间跟踪算法在稳定分布脉冲噪声环境下也应该具有很好的性能, 后面的仿真结果进一步证实了这一点。

### 5 数值仿真

为了验证本文提出算法的有效性, 考虑 Alpha 稳定分布噪声环境中的时变波达方向估计问题。本文采用的广义信噪比 GSNR (generalized signal noise ratio) 表示为

$$\text{GSNR} = 10 \log_{10} \frac{E(|s|^2)}{Y} \quad (13)$$

**试验 1** 为了对本文提出的 RLM\_PAST 算法和文献[2]中的 PAST 算法进行比较, 采用与文献[2]相同的仿真环境。即, 设  $N = 9$  个阵元组成均匀线性阵列, 阵列间隔为半波长,  $r = 3$  个平面波入射到阵列上, 入射角随时间变化。其中两个信号的入射角是线性缓慢变化的, 即信号 1 从  $20^\circ$  到  $40^\circ$  变化, 信号 2 从  $40^\circ$  到  $20^\circ$  变化。信号 3 的入射角是不变的, 固定为  $10^\circ$ 。根据观测矢量分别用上述两种算法估计出每个时刻的信号子空间, 然后用 TLS-ESPRIT<sup>[10]</sup>方法估计波达方向。图 1 和图 2 分别给出了在  $\alpha = 1.85$ 、GSNR = 12dB 的对称 Alpha 稳定分布脉冲噪声环境中用 PAST 算法和 RLM\_PAST 算法的跟踪结果。

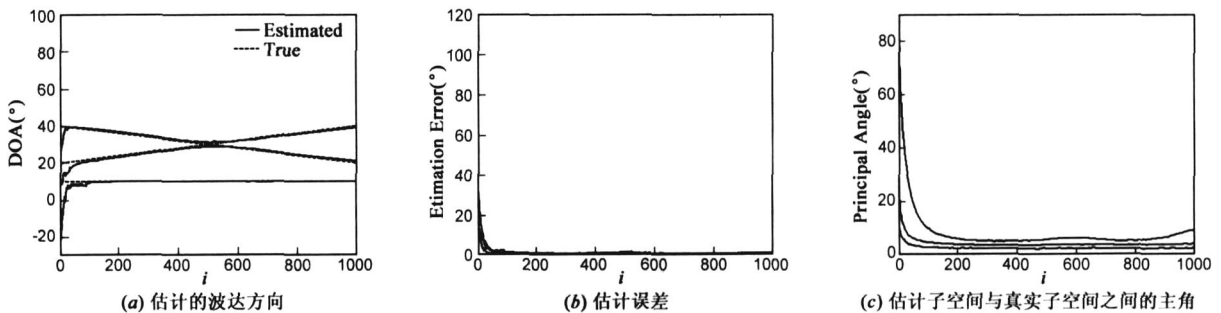


图 1  $\alpha=1.85$ , GSNR=12dB 时 RLM\_PAST 算法的子空间跟踪结果

可以看出 RLM\_PAST 算法在稳定分布噪声环境下, 估计子空间与真实子空间之间的夹角都非常小而且非常稳定, 说明估计子空间非常接近真实子空间, 因此跟踪轨迹与真实信号的轨迹非常一致且估计结果稳定。PAST 算法在脉冲噪声的影响下, 当三个波达方向之间离得较远时, 估计子空间与真实子空间之间的夹角比较稳定, 数值较 RLM\_PAST 算法情况下的要大, 说明估计子空间与真实子空间之间是有一定偏差的, 因此跟踪轨迹的趋势是一致的, 但是估计误差较大; 当其中两个波达方向之间离得很近甚至相等时, 估计子空间与真实子空间之间的夹角出现较大的波动, 因而跟踪

轨迹也出现较大的波动。

**试验 2** 设  $N = 9$  个阵元组成均匀线性阵列, 阵列间隔为半波长, 一个入射角随时间从  $20^\circ$  到  $40^\circ$  线性缓慢变化的平面波入射到阵列上, 图 3 给出了当稳定分布脉冲噪声的特征指数为  $\alpha = 1.5$  时在不同广义信噪比下分别采用 PAST 算法和 RLM\_PAST 算法跟踪入射角变化时的平均估计误差, 由图可以看出 PAST 算法的平均估计误差随着信噪比的减小而显著增大, 而 RLM\_PAST 算法的平均估计误差随着信噪比的减小变化不大。图 4 给出了当广义信噪比为 GSNR = 10dB 时在不同特征指数的稳定分布噪声环境下同样用这两种算法跟踪入射角变化

时的平均估计误差. 由图可以看出 PAST 算法的平均估计误差随着噪声脉冲性的增强而增加, 而 RLM\_PAST 算法的平均估计误差在不同特征指数的稳定分布噪声环

境下变化不大. 这个例子也说明了 RLM\_PAST 算法具有很好的鲁棒性.

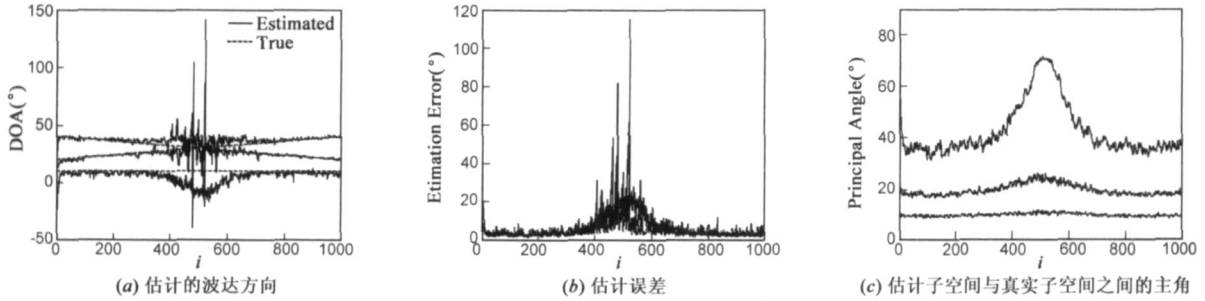


图2  $\alpha=1.85, GSNR=12\text{dB}$ 时PAST算法的子空间跟踪结果

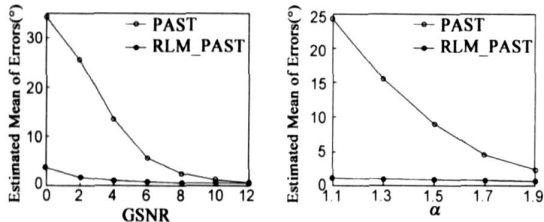


图3  $\alpha=1.5$ 时不同广义信噪比下 RLM\_PAST算法和PAST算法的平均估计误差

图4 GSNR=10dB时不同特征指数的稳定分布噪声下 RLM\_PAST算法和PAST算法的平均估计误差

### 6 结论

本文研究了 Alpha 稳定分布噪声环境中韧性的投影近似子空间跟踪问题. 在分析了 PAST 算法在脉冲噪声环境下性能退化原因的基础上, 依据鲁棒的 M 估计方法提出了一个新的代价函数, 并推导出基于递归最小 M 估计的韧性投影近似自适应信号子空间跟踪算法 (RLM\_PAST). 由于采用了适合噪声模型的 M 估计函数, 新算法与采用递归最小二乘估计的子空间跟踪算法相比, 在稳定分布脉冲噪声环境下具有更好的性能. 把新方法应用于波达方向 (DOA) 估计, 数值仿真结果表明了该算法的有效性.

### 参考文献:

[1] C E Davila. Efficient, high performance, subspace tracking for time domain data [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2000, 48(12): 3307- 3315.  
 [2] Bin Yang. Projection approximation subspace tracking [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 1995, 43(1): 95- 107.  
 [3] Bin Yang. Convergence analysis of the subspace tracking algorithms PAST and PASTd [C]. Proc IEEE ICASSP '96, Atlanta, GA, 1996, 1: 2856- 2859.  
 [4] S C Chan, Y Wen, K H. A robust PAST algorithm for subspace tracking in impulsive noise [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2006, 54(1): 105- 115.

[5] K L Blackard. Measurements and models of radio frequency impulsive noise for indoor wireless communication [J]. IEEE J. Sel. Areas Commun., 1993, 11(7): 991- 1001.  
 [6] C L Nikias, M Shao. Signal Processing with Alpha Stable Distribution and Application [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1995.  
 [7] P J Huber. Robust Statistics [M]. New York: Wiley, 1981.  
 [8] J Messer, J F Cardoso. Robust parameter estimation of a deterministic signal in impulsive noise [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2000, 48(4): 935- 942.  
 [9] Y Zou, S C Chan, T S Ng. A recursive least M Estimate (RLM) adaptive filter for robust filtering in impulse noise [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2000, 7(1): 324- 326.  
 [10] 张贤达. 现代信号处理 (第二版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.  
 X D Zhang. Modern Signal Processing (2<sup>nd</sup> Edition) [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002. (in Chinese)

### 作者简介:



李 森 女, 1973 年生于辽宁盖州, 大连理工大学博士生, 主要研究方向为非高斯信号处理.  
E mail: listen@newmail.dlmu.edu.cn



邱天爽 男, 1954 年生于江苏海门, 博士, 大连理工大学电子与信息工程学院教授, 博士生导师, IEEE 会员, 信号处理学会委员, 主要研究方向为数字信号处理理论、生物医学信号处理、非平稳与非高斯信号处理等.  
E mail: qiutsh@dlut.edu.cn